

Рациональные уравнения

Равенство, содержащее переменную, называют уравнением с одной переменной, или уравнением с одним неизвестным.

Примеры уравнений с одним неизвестным:

$$\frac{2}{7}x = 0$$

$$-0.7x + 3 = 10$$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$(x - 1)(x - 5) = 20$$

$$|x| = 6$$

Выражение, стоящее слева от знака равенства, называется левой частью уравнения, а стоящее справа выражение — правой частью уравнения.

Слагаемые частей уравнения называются членами уравнения. Корнем уравнения называется то значение неизвестного, которое обращает данное уравнение в верное числовое равенство.

Решить уравнение — значит найти все его корни или установить, что их нет.

Уравнения, имеющие одинаковое множество корней, называются равносильными уравнениями.

Существуют уравнения, которые имеют один корень, несколько корней, бесконечно много корней или не имеют их совсем.

Уравнение называется рациональным, если оно представимо в виде

$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, где $P(x)$ и $Q(x) \neq 0$ - многочлены. Его корнями являются все нули многочлена $P(x)$, за исключением тех, которые являются нулями многочлена $Q(x)$.

Другими словами, это уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$$

Рациональное уравнение — это такое уравнение, в обеих частях которого содержатся рациональные выражения.

Рациональные уравнения делятся на две большие группы: **целые** и **дробно-рациональные**. Рациональное уравнение будет являться целым в том случае, если в записи левой и правой его частей содержатся целые рациональные выражения.

Рациональное уравнение будет являться дробно-рациональным уравнением, если оно содержит дробь с неизвестным в знаменателе.

Алгоритм решения рационального уравнения:

Перенести все слагаемые из правой части в левую, чтобы правая часть была равна нулю.

Совершить преобразования для приведения уравнения к виду $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$

Решить уравнение, перейдя к системе

$$\begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$$

Второе условие системы позволяет найти область допустимых значений уравнения.

Примеры заданий

$$\frac{7x + 3}{3x + 7} = -1$$

Решение

$$\frac{7x + 3}{3x + 7} + 1 = 0$$

$$\frac{7x + 3}{3x + 7} + \frac{3x + 7}{3x + 7} = 0$$

$$\frac{7x + 3 + 3x + 7}{3x + 7} = 0$$

$$\frac{10x + 10}{3x + 7} = 0$$

$$\begin{cases} 10x + 10 = 0 \\ 3x + 7 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 1 = 0 \\ 3x \neq -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x \neq -\frac{7}{3} \end{cases}$$

Ответ: корень уравнения $x = -1$